UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **P.A. 2009-3**
DACIBAHCC **09-02-2010**

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1
Una matriz tridiagonal es aquella que contiene elementos no nulos en las tres diagonales centrales y el resto son ceros. Escriba una función en MATLAB que verifique que una matriz sea cuadrada, tridiagonal, y de diagonal estrictamente dominante en cuyo caso retornará un valor 1, en caso contrario retornará valor 0.
Cabecera.- ***function valor=prueba_matriz(A)***

Solución

```
function valor=prueba_matriz(A)
[nf,nc]=size(A);
if nf==nc
  D=diag(diag(A));
  AA=A-D;
  valor=1;
  for i=1:nf
      if abs(A(i,i))<=sum(abs(AA(i,:)))
          valor=0;
      end
  end
  if valor==1
      for i=1:nf
          for j=1:nc
              if abs(i-j)<=1
                  if A(i,j)==0
                      valor=0;
                  end
              else
                  if A(i,j)~=0
                      valor=0;
                  end
              end
          end
      end
  end
 else
  valor=0;
end
```

Problema 2
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\begin{bmatrix} 4 & -k & 0 \\ -k & 5 & k-3 \\ 0 & k+3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre los valores de k para los cuales el sistema converge al aplicar Jacobi con el criterio de la diagonal estrictamente dominante.
b) Encuentre los valores de k para los cuales el sistema converge al aplicar Jacobi con el criterio del radio espectral. Comente las discrepancias entre a) y b).
c) Realice 05 iteraciones de Jacobi usando un valor de k tal que el radio espectral de Jacobi sea de 0.90 con $X^{(0)}=[0,0,0]^T$. Estime el error.

Solución

a) Aplicando el criterio de la diagonal estrictamente dominante.

$$4 > |-k|$$

$$5 > |-k| + |k-3|$$

$$4 > |k+3|$$

Resolviendo la desigualdad:

$$-1 < k < 1$$

b) Aplicando Jacobi:

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & k/4 & 0 \\ k/5 & 0 & (3-k)/5 \\ 0 & (-k-3)/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_j) < 1$$

$$-\sqrt{14.5} < k < \sqrt{14.5}$$

c)

$$\rho(T_j) = \frac{1}{10}\sqrt{10k^2 - 45} = 0.9$$

$$k = 3.5496$$

Planteando la iteración de Jacobi:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.25	0.4	0.75
2	0.6050	0.4951	0.0950
3	0.6893	0.8190	-0.0606
4	0.9768	0.8960	-0.5911
5	1.0451	1.1585	-0.7171

El error es aproximadamente 0.26, lo cual significa que la convergencia es lenta.

Problema 3

Sea $f(x) = e^{-x} + 4x^3 - 5$

a) Localice las raíces de esta función.
b) Determine el algoritmo de punto fijo correcto probando por lo menos dos alternativas para obtener la menor raíz.
c) Realice 03 iteraciones de bisección para un intervalo inicial de longitud unitaria y muestre el error para la menor raíz.
d) A partir del valor obtenido en c) realice 03 iteraciones del método del Punto Fijo e indica cuantas cifras decimales exactas se espera tener.

<u>Solución</u>

a) Se localizaron raíces en [-8, -7] y [1, 2]

b) Alternativas de punto fijo:

$$x_0 = 7.5$$

$$x = -Ln\left(5 - 4x^3\right) = g_1(x)$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{5 - e^{-x}}{4}} = g_2(x)$$

Se puede comprobar que:

$$\left|g_1(x)\right| < 1$$

$$\left|g_2(x)\right| > 1$$

Por lo tanto el algoritmo de punto fijo convergente será:

$$x_{n+1} = -Ln\left(5 - 4x_n{}^3\right) = g_1(x_n)$$

c) Aplicando bisección:

a	***c***	***b***	***err***
-8	-7.5	-7	0.5
-7.5	-7.25	-7	0.25
-7.5	-7.375	-7.25	0.125

d) Aplicando bisección:

$$x_{n+1} = -Ln\left(5 - 4x_{n+1}{}^3\right)$$

x_0 = -7.375
x_1 = -7.3837
x_2 = -7.3872
x_3 = -7.3886

Teniendo la última aproximación 3 c. d. e.

Problema 4

En el estudio de las vibraciones de un sistema consistente en 3 masas insertadas en una varilla, la ecuación del movimiento tiene que ver con la formulación de valores propios:

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - 2m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - 3m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad donde: \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{k}$$

$x = Vector\ desplazamiento$

$m = masa = cte$

$k = cte$

a) Muestre el sistema a resolver: $A\,x = \lambda\ x$.
b) Obtener todos los valores propios y el vector propio correspondiente al valor propio intermedio.
c) Aplique el método de la potencia inversa con desplazamiento, para obtener λ más cercano a q=1.2 y su vector propio correspondiente. Realice 04 iteraciones partiendo de $(1,1,-0.5)^T$ y muestre el error de λ y x, comparado con los exactos obtenidos en b).

<u>Solución</u>

a) Se puede demostrar que: $A\,x = \lambda\ x$

   Con $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

b) Luego de resolver el polinomio característico:

   $\lambda_1 = 2.3847$

   $\lambda_2 = 1$

   $\lambda_3 = 0.2792$

   Para el cálculo del vector propio intermedio:

   $(A - \lambda_2 I)x_2 = 0$

   $x_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Aplicando el método de la potencia inversa con desplazamiento:

   $q = 1.2$

   $B = (A - qI)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2744 & -2.4390 & 2.2866 \\ -1.2195 & -1.9512 & 1.8292 \\ 0.7622 & 1.2195 & -3.0183 \end{bmatrix}$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{pmatrix} -3.8567 \\ -4.0854 \\ 3.4909 \end{pmatrix} = \mu_1 x_1 = -4.0854 \begin{pmatrix} 0.9440 \\ 1 \\ -0.8545 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = q + \frac{1}{\mu_1} = 0.9552$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{pmatrix} -4.6519 \\ -4.6655 \\ 4.5181 \end{pmatrix} = \mu_2 x_2 = -4.6655 \begin{pmatrix} 0.9971 \\ 1 \\ -0.9684 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = q + \frac{1}{\mu_2} = 0.9857$$

$$y_3 = Bx_2 = \begin{pmatrix} -4.9269 \\ -4.9389 \\ 4.9024 \end{pmatrix} = \mu_3 x_3 = -4.9386 \begin{pmatrix} 0.9976 \\ 1 \\ -0.9927 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = q + \frac{1}{\mu_3} = 0.9975$$

$$y_4 = Bx_3 = \begin{pmatrix} -4.9826 \\ -4.9837 \\ 4.9761 \end{pmatrix} = \mu_4 x_4 = -4.9837 \begin{pmatrix} 0.9998 \\ 1 \\ -0.9985 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = q + \frac{1}{\mu_4} = 0.9993$$

Se puede observar que estos valores contienen poco error comparado con el valor exacto.

EL PROFESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **P.A. 2009-3**
DACIBAHCC **11-02-2010**

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

Problema 1
Se desea crear una función en MATLAB para la factorización de Cholessky con la cabecera: ***function L=Cholessky(A)***
Si A es cuadrada, simétrica y definida positiva la salida será la matriz triangular inferior (L) de la factorización de Cholessky. En caso contrario la salida de L será **NaN**.
Nota.- No usar la función "chol".

Solución

```
function L=cholessky(A)
[n,m]=size(A);
if n==m
   if A==A'
      defpos=1;
      for i=1:n
          m=A(1:i,1:i);
          if det(m)<=0
              defpos=0;
          end
      end
      if defpos==1
         L(1,1)=A(1,1)^0.5;
         for j=2:n
             L(j,1)=A(j,1)/L(1,1);
         end
         for i=2:n-1
             s1=0;
             for k=1:i-1
                 s1=s1+L(i,k)^2;
             end
             L(i,i)=(A(i,i)-s1)^0.5;
             for j=i+1:n
                 s2=0;
                 for k=1:i-1
                     s2=s2+L(j,k)*L(i,k);
                 end
                 L(j,i)=1/L(i,i)*(A(j,i)-s2);
             end
         end
         s3=0;
         for k=1:n-1
             s3=s3+L(n,k)^2;
         end
         L(n,n)=(A(n,n)-s3)^0.5;
      else
```

```
            L=NaN;
        end

    else
        L=NaN;
    end
else
    L=NaN;
end
```

Problema 2

Una empresa ensambladora de turbinas hidráulicas, tiene tres tipos para capacidades similares: Pelton, Francis y Kaplan. Para armar una Pelton necesita 48 horas de ensamblado, 12 para probarla, y 54 para instalar en el sitio. Para una Francis requiere 60 horas de ensamblado, 14 para probarla, y 60 para instalar. Y por último, para Kaplan se requiere 50 para ensamblado, 30 para probarla, y 65 para instalar. La empresa dispone en horas por mes de 892 para ensamble, 358 para pruebas, y 1036 horas para instalación.

a) Plantear el sistema de ecuaciones.
b) Haciendo uso de la eliminación Gaussiana con pivoteo parcial calcule cuantas turbinas de cada tipo se pueden producir en un mes.
c) ¿El sistema de ecuaciones está bien condicionado?

<u>**Solución**</u>

a) Formando el sistema ***Ax=b***:

$$A = \begin{bmatrix} 48 & 60 & 50 \\ 12 & 14 & 30 \\ 54 & 60 & 65 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 892 \\ 358 \\ 1036 \end{bmatrix}$$

b) Permutando las Filas 1 y 3:

$$\begin{bmatrix} 54 & 60 & 65 \\ 12 & 14 & 30 \\ 48 & 60 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ F \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1036 \\ 358 \\ 892 \end{bmatrix}$$

F_2-(12/54)$F_1 \to F_2$

F_3-(48/54)$F_1 \to F_3$

$$\begin{bmatrix} 54 & 60 & 65 \\ 0 & 0.6667 & 15.5556 \\ 0 & 6.6667 & -7.7778 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ F \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1036 \\ 127.7778 \\ -28.8889 \end{bmatrix}$$

Permutando las Filas 2 y 3:

$$\begin{bmatrix} 54 & 60 & 65 \\ 0 & 6.6667 & -7.7778 \\ 0 & 0.6667 & 15.5556 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ F \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1036 \\ -28.8889 \\ 127.7778 \end{bmatrix}$$

F_3-(0.6667/6.6667)$F_2 \to F_3$

$$\begin{bmatrix} 54 & 60 & 65 \\ 0 & 6.6667 & -7.7778 \\ 0 & 0 & 16.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ F \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1036 \\ -28.8889 \\ 130.6667 \end{bmatrix}$$

Aplicando sustitución inversa:

P=4 Pelton

F=5 Francis

K=8 Kaplan

c) Numero de condicionamiento:

$k(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ =50.4891

Por lo tanto el sistema está bien condicionado.

Problema 3

Sea el sistema:

$$6x + (a+1)y + 3z = 9$$

$$2x + 4y = 4$$

$$(a-1)x - y + 2z = -3$$

a) Calcule la matriz de iteración de Jacobi T_J de este método.

b) Halle la función $\|T_J\|_\infty$ (que depende de ***a***). ¿Para qué valor de ***a*** se obtiene el mínimo de dicha función?

c) Con el valor de a obtenido en b) determine si el método de Jacobi resulta convergente.

d) Realice 05 iteraciones con el valor de ***a*** obtenido anteriormente a partir de un vector inicial nulo y estime el error.

<u>Solución</u>

a) $$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a+1}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1-a}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\|T_J\|_\infty = \max\left\{\left|-\frac{a+1}{6}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1-a}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right|\right\}$$

El mínimo de $\|T_J\|_\infty$ se da para a=1/2

Con $\|T_J\|_\infty = 0.75$

c)

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(T_J) = 0.5 < 1$

Por lo tanto resulta convergente.

d) Iteración de Jacobi:

i	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**Err**
0	0	0	0	---
1	1.5	1	-1.5	1.5
2	2	0.25	-0.625	0.875
3	1.75	0	0.875	0.25
4	1.9375	0.125	-1.0625	0.1875
5	2	0.0313	-0.9531	0.109375

Problema 4

Una partícula se mueve de acuerdo a una trayectoria gobernada por una función del tiempo por medio de :

$X(t) = \cos(t^3)-\sin(2t^2)$ $\quad$ $Y(t) = \cos(t)$. $\quad$ $Z(t) = t^3 - 2t^2$.

Donde: t en segundos y las posiciones en metros.

Se desea determinar el tiempo en el que la partícula atraviesa un plano paralelo que se ubica por encima del plano XY separado a un metro, si esta parte del reposo.

a) Determine la ecuación a resolver y localice las raíces.
b) Con un intervalo de longitud unitaria realice 03 iteraciones de bisección.
c) A partir del valor obtenido en b) evalué 04 iteraciones del método de Newton-Raphson y estime el error.
d) Encuentre el algoritmo convergente de aproximaciones sucesivas sin realizar iteraciones aplicando un criterio de convergencia adecuado.

<u>Solución</u>

a)

$$t^3 - 2t^2 = 1$$

$$t \in [2, 3]$$

b) Aplicando Bisección:

a	**c**	**b**	**Err**
2	2.5	3	0.5
2	2.25	2.5	0.25
2	2.125	2.25	0.125

c) t_0=2.125

$$t_{n+1} = t_n - \frac{t_n^{\ 3} - 2t_n^{\ 2} - 1}{3t_n^{\ 2} - 4t_n}$$

n	**t_n**	**Err**
1	2.2113	0.8630
2	2.20559553	0.00570478
3	2.2055694309	0.0000261
4	2.2055694304	5e-10

d)

$$t = \sqrt{\frac{1}{t-2}}$$

$$t = \sqrt[3]{1+2t^2}$$

$$t = \frac{1}{t(t-2)}$$

$$t = \sqrt{\frac{t^3-1}{2}}$$

$$t = \frac{1}{t^2}+2$$

Se puede verificar que la segunda y quinta forma son convergentes.

LOS PROFESORES